Mathematical Journal of Okayama University

Volume 10, *Issue* 2 1960 *Article* 4

MARCH 1961

Über die Koeffizienten der schlichten Funktionen (II)

Ken'iti Koseki*

*Okayama University

ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (II)

KEN'ITI KOSEKI

Ich veröffentlichte neuerdings meine Arbeit[1] "Über die Koeffizienten der schlichten Funktionen". Die Berechnungen im 4. Schritte sind aber bedauerlich falsch. Die $-\int_{a-h}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}(\tilde{\alpha}'(s_2)-\alpha'(s_2))$ $\int_{s}^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_{s}^{s_3}\cdots\int_{s}^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1$ strebt[2] nicht in der Tat gegen Null mit h. In dieser Arbeit will ich diesen Irrtum berichtigen.

Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Kreises $|z|<1$ regulären und schlichten Funktionen von der Form

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots \qquad + p_n z^{n+1} + \cdots$$

die normierten schlichten Funktionen. Wir bezeichnen für eine feste n die kleinste obere Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten p_n von allen normierten schlichten Eunktionen in $|z|<1$ mit M_n.

Es gibt dann bekanntlich eine schlichte Funktion $z + q_1 z^2 + \cdots + q_n z^{n+1} + \cdots$ mit $q_n = M_n$. Folglich nehmen wir an, dass für die Funktion $\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots$ es $p_n = M_n$ ist.

Es besteht dann für die Funktion $\varphi = k(z)$ eine Löwnersche Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(z,t)}{\partial z} z \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}, \qquad 0 \leqq t < \infty \\ &g(z,0) = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

wo $\kappa(t)$ eine stetige Funktion darstellt und $|\kappa(t)| = 1$ ist. Wir bezeichnen die Lösung der Gleichung (1) mit $g(z,t) = e^t\{z + g_1(t)z^2 + \cdots + g_n(t)z^{n+1} + \cdots\}$.

Wir denken nun uns die folgende Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z,t)}{\partial z} z \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \\ &h(z,s) = e^s\{z + \tilde{g}_1(s)z^2 + \cdots \quad + \tilde{g}_n(s)z^{n+1} + \cdots\} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

---

1) K. Koseki : ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN, Math. J. Okayama Univ., Vol. 9 (1960), S. 173—197.

2) K. Koseki : a. a. O. S. 189—190.

wo $h(z, s)$ eine willkürliche schlichte Funktion in $|z|<1$ bedeutet. Wir bezeichnen die Lösung der Gleichung (2) mit $h(z, t) = e^t\{z+\tilde{g}_1(t)z^2+\cdots+\tilde{g}_n(t)z^{n+1}+\cdots\}$. Die Funktion $h(z, t)$ ist dann schlicht[3)] in $|z|<1$, und es gilt[4)]

$$\tilde{g}(0)=\int_s^0 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)+$$

$$\sum_{\mu=2}^{n-2}(\mu+1)\tilde{g}_\mu(s)e^{-\mu s}\Big\{\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{1-(\mu+1)}-(\mu+1)}$$

$$(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu-1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}+n\,\tilde{g}_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1$$

$$+\tilde{g}_n(s)e^{-ns}. \tag{3}$$

Da $\Re\ \tilde{g}_n(0)\leqq g_n(0)=p_n$ ist, so nimmt der reelle Teil der rechten Seite von der Formel (2) das Maximum an für $\tilde{g}_n(s)=g_\mu(s)$ ($\mu=1, 2, \cdots, n$). Wir setzen nun $e^{-\mu s}\Big\{\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Big(\sum_{p1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1}$ $p_{i-(\mu+1)}\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}$ $(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}=b_\mu(s)$, ($\mu=1,\ 2,\ \cdots, n-2$), $e^{-(n-1)s}$ $\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1=b_{n-1}(s)$, $\quad e^{-ns}=b_n(s)$.

Der reelle Teil von $\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)\tilde{g}_\mu(s)b_\mu(s)+n\tilde{g}_{n-1}(s)b_{n-1}(s)+\tilde{g}_n(s)b_n(s)$ nimmt für die Funktion $g(z, s)$ sienes Maximum an. Folglich genügt[5)] die Funktion $g(z, s)$ der folgende Differentialgleichung

$$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{f(z)^\nu}=\sum_{\nu=-n}^{n}\frac{B_\nu}{Z^\nu}, \tag{4}$$

---

3) K. Koseki : a. a. O. S. 178.

4) K. Koseki : a. a. O. S. 185.

5) A. C. Schaeffer and D. C. Spencer : COEFFIENT REGIONS FOR SCHLICHT FUNCTIONS. S. 36.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{wo } f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu z^\nu (a_1=1),\ \ f^k(z)=\sum_{i=k}^{\infty}a_i^{(k)}z^i,\ \ A_\nu=\sum_{k=\nu+1}^{n+1}a_k^{(\nu+1)}F_k,\\
&B_\nu=\sum_{k=1}^{n+1-\nu}ka_kF_{k+\nu},\ (\nu=1,2,\cdots,n),\ B_0=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)a_kF_k,\quad B_{-\nu}=\bar{B}_\nu,\\
&F_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}-i\frac{\partial F}{\partial y_k}\right),\ x_k=\frac{1}{2}(a_k+\bar{a}_k),\ y_k=\frac{1}{2i}(a_k-\bar{a}_k),\\
&\qquad\qquad (k=2,3,\cdots,n+1)\\
&F=\Re\left(\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)a_{\mu+1}b_\mu+na_nb_{n-1}+a_{n+1}b_n\right).
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Wir finden leicht

$$\left.\begin{aligned}
F_{\mu+1}&=\frac{1}{2}(\mu+1)b_\mu,\qquad(\mu=1,2,\cdots,\quad n-2)\\
F_n&=\frac{1}{2}nb_{n-1},\\
F_{n+1}&=\frac{1}{2}b_n.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Aus (6) folgt es ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned}
&A_\nu=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=\nu+1}^{n}a_k^{(\nu+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(\nu+1)}b_n\right),\ (\nu=1,2,\cdots,n-1),\\
&\qquad A_n=\frac{1}{2}a_{n+1}^{(n+1)}b_n=\frac{1}{2}b_n,\\
&B_\nu=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-\nu}k(k+\nu)a_kb_{k+\nu-1}+(n+1-\nu)a_{n+1-\nu}b_n\right),\\
&\qquad(\nu=1,2,\cdots,n-1),\quad B_n=\frac{1}{2}b_n,\\
&B_0=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k(k-1)a_kb_{k-1}+na_{n+1}b_n\right),\\
&B_{-\nu}=\bar{B}_\nu,\ \ f'(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\,\nu z^{\nu-1}.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Wir setzen die Formeln (7) in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu\right)^2(A_1f(z)^{n-1}+A_2f(z)^{n-2}+\cdots+A_n)\\
&=\frac{1}{z^n}(B_n+B_{n-1}z+B_{n-2}z^2+\cdots+B_0z^n+\bar{B}_1z^{n+1}+\cdots+\bar{B}_nz^{2n})f(z)^{n+2}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Die linke Seite von (8) $=\left(\sum_{k=2}^{n}a_k^{(2)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(2)}b_n\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu\right)^2\left(\sum_{\nu=n-1}^{\infty}\right.$ $\left.a_\nu^{(n-1)}z^\nu\right)+\left(\sum_{k=3}^{n}a_k^{(3)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(3)}b_n\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu\right)^2\left(\sum_{\nu=n-2}^{\infty}a_\nu^{(n-2)}z^\nu\right)+\cdots+\left(\sum_{k=i+1}^{n}\right.$ $\left.a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(i+1)}b_n\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu\right)^2\left(\sum_{\nu=n-i}^{\infty}a_\nu^{(n-i)}z^\nu\right)+\cdots+b_n\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i+1}^{n}\right.$

$$a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(i+1)}b_n)\,(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2\,(\sum_{\nu=n-i}^{\infty}a_\nu^{(n-i)}z^\nu)\;+\;b_n(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2. \tag{9}$$

Die rechte Seite von (8) $=\dfrac{1}{z^n}[b_n+\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-i}k(k+i)a_kb_{k+i-1}+(n+1-$ $i)a_{n+1-i}b_n)z^{n-i}+(\sum_{k=1}^{n}k(k-1)a_kb_{k-1}+na_{n+1}b_n)z^n+\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-i}k(k+i)\bar a_k\bar b_{k+i-1}+$

$$(n+1-i)\bar a_{n+1-i}\bar b_n)z^{n+i}+\bar b_n z^{2n}]\cdot\sum_{\nu=n+2}^{\infty}a_\nu^{(n+2)}z^\nu. \tag{10}$$

Es ist aber

$$\left.\begin{aligned}&(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}k(j-k+1)a_ka_{j-k+1}z^{j+1},\\&(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2\cdot(\sum_{\nu=n-i}^{\infty}a_\nu^{(n-i)}z^\nu)=\sum_{p=n-i+2}^{\infty}\ \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)}\ \sum_{k=1}^{j}k(j-k+1)a_ka_{j-k+1}\\&\qquad\qquad a_{p-(j+1)}^{(n-i)}z^p.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir setzen die Formeln (11) in (9) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=i+1}^{n}a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(i+1)}b_n)\,(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2\,(\sum_{\nu=n-i}^{\infty}a_\nu^{(n-i)}z^\nu)+b_n(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\nu z^\nu)^2\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=i+1}^{n}a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(i+1)}b_n)\cdot\sum_{p=n-i+2}^{\infty}\ \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)}\ \sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{p-(j+1)}^{(n-i)}z^p\\&+b_n\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}z^{j+1}.\end{aligned} \tag{9'}$$

Aus (9′) können wir leicht einsehen

$$\left.\begin{aligned}&\text{die Koeffizient von } z^p \text{ in der Formel } (9')=\sum_{i=\alpha}^{n-1}\ \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)}\ \sum_{l=1}^{j}(\sum_{k=i+1}^{n}\\&a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_{n+1}^{(i+1)}b_n)l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{p-(j+1)}^{(n-i)}+b_n\sum_{l=1}^{p-1}l(p-l)a_la_{p-l}\\&(\text{wenn } p\geqq 3 \text{ ist}),\ \text{wo } \alpha \text{ die grössere der Zahlen 1 und } n-p+2 \text{ ist}.\\&\text{die Koeffizient von } z^p \text{ in der Formel } (9')=b_na_1^2=b_n\ \ (\text{wenn } p=2 \text{ ist}).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus (10) folgt ohne weiteres

$$\text{die Koeffizient von } z^p \text{ in } (10)=\begin{cases}b_n, & (\text{wenn } p=2 \text{ ist}).\\ \displaystyle\sum_{i=n+2-p}^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-i}k(k+i)a_kb_{k+i-1}+(n+1-i)a_{n+1-i}b_n)a_{p+i}^{(n+2)} & \\ +b_na_{n+p}^{(n+2)}, & (\text{ween } n+2>p\geqq 3 \text{ ist}).\\ \displaystyle(\sum_{k=1}^{n}k(k-1)a_kb_{k-1}+na_{n+1}b_n)a_p^{(n+2)}+\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-i}k(k+i)a_kb_{k+i-1} & \\ +(n+1-i)a_{n+1-i}b_n)a_{n+i}^{(n+2)}+b_na_{n+p}^{(n+2)}, & (\text{wenn } p=n+2 \text{ ist}).\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p-(n+2)}(\sum_{k=1}^{n-i}k(k+i)\bar a_k\bar b_{k+i-1}+(n+1-i)\bar a_{n+1-i}\bar b_n)a_{p-i}^{(n+2)}+(\sum_{k=1}^{n} & \end{cases}$$

$$\tag{13} \left|\begin{aligned} & k(k-1)a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i) a_k b_{k+i-1} \\ & +(n+1-i)a_{n+1-i}b_n\Big) a_{p+i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad (\text{wenn } 2n+2>p\geqq \\ & n+2+1 \text{ ist}). \\ & \bar b_n a_{p-n}^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar a_k \bar b_{k+i-1} + (n+1-i)\bar a_{n+1-i}\bar b_n\Big) a_{p-i}^{(n+2)} \\ & +\Big(\sum_{k=1}^{n} k(k-1)a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n\Big) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i) a_k b_{k+i-1} \\ & +(n+1-i)a_{n+1-i} b_n\Big) a_{p+i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad (\text{wenn } p \geqq 2n+2 \text{ ist}). \end{aligned}\right.$$

Aus (12) und (13) folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{p-(n+2)}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar a_k \bar b_{k+i-1} + (n+1-i)a_{n+1-i}\bar b_n\Big) a_{p-i}^{(n+2)} + \Big(\sum_{k=1}^{n} k(k-1) a_k b_{k-1} \\ & + n a_{n+1} b_n\Big) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i) a_k b_{k+i-1} + (n+1-i) a_{n+1-i} b_n\Big) a_{p+i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)} \\ & = \sum_{i=\alpha}^{n-1}\ \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)}\ \sum_{l=1}^{j}\Big(\sum_{k=i+1}^{n} a_k^{(i+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(i+1)} b_n\Big) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-i)} + b_n \sum_{l=1}^{p-1} \\ & l(p-l) a_l a_{p-l}, \end{aligned} \tag{14}$$

wenn $2n+2>p\geqq n+2+1$ ist.

Ebenso folgt es aus (12) und (13)

$$\begin{aligned} & \bar b_n a_{p-n}^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar a_k \bar b_{k+i-1} + (n+1-i)\bar a_{n+1-i}\bar b_n\Big) a_{p-i}^{(n+2)} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \\ & k(k-1) a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n\Big) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i) a_k b_{k+i-1} + (n+1-i) a_{n+1-i} b_n\Big) a_{p+i}^{(n+2)} \\ & + b_n a_{n+p}^{(n+2)} = \sum_{i=\alpha}^{n-1}\ \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)}\ \sum_{l=1}^{j}\Big(\sum_{k=i+1}^{n} a_k^{(i+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(i+1)} b_n\Big) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-i)} \\ & + b_n \sum_{l=1}^{p-1} l(p-l) a_l a_{p-l}, \end{aligned} \tag{15}$$

wenn $p\geqq 2n+2$ ist.

Da die Funktion $g(z, s)$ der Gleichung (4) genügt, so werden die Gleichungen (4) und (5) durch die $a_i = a_i(s) = g_{i-1}(s)$ $(i = 2, 3, \cdots)$ genügt.

Aus $f^{(k)}(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} z^i$ bekommen wir

$$a_i^{(k)} = \sum_{j_1=1}^{i-(k-1)} \cdots \sum_{j_k=1}^{i-(k-1)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \tag{16}$$
$$(j_1 + \cdots + j_k = i).$$

Wir setzen zum Beispiel $n=4$ und $p=7$ in (14). Es folgt dann aus (14)

$$(\sum_{k=1}^{3} k(k+1)\bar{a}_k(s)\bar{b}_k(s)+4\bar{a}_4(s)\bar{b}_4(s))+(\sum_{k=1}^{4} k(k-1)a_k(s)b_{k-1}(s)+4a_5(s)b_4(s))$$
$$a_7^{(6)}(s)+\sum_{i=1}^{3}(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)a_k(s)b_{k+i-1}(s)+(5-i)a_{5-i}(s)b_4(s))a_{7+i}^{(6)}(s)+b_4(s)a_{11}^{(6)}(s)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2+i}\sum_{l=1}^{j}(\sum_{k=i+1}^{4} a_k^{(i+1)}(s)kb_{k-1}(s)+a_5^{(i+1)}(s)b_4(s))l(j-l+1)a_l^{(s)}a_{j-l+1}^{(s)}a_{6-j}^{(4-i)}(s)$$
$$+b_4(s)\sum_{l=1}^{6} l(p-l)a_l(s)a_{p-l}(s). \tag{17}$$

Der Einfachheit halber beschreiben wir statt $a_i(s)$ bloss a_i. Wir können leicht finden

$$\left.\begin{aligned} &a_7^{(6)}=7a_2, \quad a_8^{(6)}=6a_3+{}_6C_4a_2^2, \quad a_9^{(6)}=6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3, \\ &a_{10}^{(6)}=6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4, \\ &a_{11}^{(6)}=6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2a_3^2+3a_2^2a_4)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Daher ist

$$\text{die linke Seite von (17)} = (\sum_{k=1}^{3} k(k+1)\bar{a}_k\bar{b}_k+4\bar{a}_4\bar{b}_4)+(\sum_{k=1}^{4} k(k-1)a_kb_{k-1}$$
$$+4a_5b_4)6a_2+(\sum_{k=1}^{3} k(k+1)a_kb_k+4a_4b_4)(6a_3+15a_2^2)+(\sum_{k=1}^{2} k(k+2)a_kb_{k+1}+3a_3b_4)$$
$$(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+(\sum_{k=1}^{1} k(k+3)a_kb_{k+2}+2a_2b_4)\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)$$
$$+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+b_4\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2a_3^2+3a_2^2a_4)+{}_6C_2 4a_2^3a_3$$
$$+{}_6C_1a_2^5\}. \tag{19}$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (17) berechnen. Wir können leicht finden

$$\left.\begin{aligned} &a_2^{(2)}=1, \quad a_3^{(2)}=\sum_{\substack{j_1=1 \\ (j_1+j_2=3)}}^{2}\sum_{j_2=1}^{2} a_{j_1}a_{j_2}=2a_2, \quad a_4^{(2)}=2a_3+a_2^2, \quad a_5^{(2)}=2a_4+2a_2a_3, \\ &a_3^{(3)}=1, \quad a_4^{(3)}=3a_2, \quad a_5^{(3)}=3a_3+3a_2^2, \quad a_5^{(4)}=4a_2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wir setzen die Formeln (20) in die rechte Seite von (17) ein, so erhalten wir

$$\text{die rechte Seite von (17)} = (\sum_{k=2}^{4} a_k^{(2)}kb_{k-1}+a_5^{(2)}b_4)\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)$$
$$a_la_{j-l+1}a_{6-j}^{(3)}+(\sum_{k=3}^{4} a_k^{(3)}kb_{k-1}+a_5^{(3)}b_4)\sum_{j_1=1}^{4}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{6-j}^{(2)}+(\sum_{k=4}^{4}$$
$$a_k^{(4)}kb_{k-1}+a_5^{(4)}b_4)\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{6-j}^{(1)}+b_4\sum_{l=1}^{6} l(7-l)a_la_{7-l}=\{2b_1$$
$$+3b_2\cdot 2a_2+4b_3(2a_3+a_2^2)+b_4(2a_4+2a_2a_3)\}\{(3a_3+3a_2^2)+4a_2\cdot 3a_2+(6a_3+4a_2^2)\}$$
$$+\{3b_2+4b_3\cdot 3a_2+(3a_3+3a_2^2)b_4\}+\{(2a_4+2a_2a_3)+4a_2(2a_3+a_2^2)+(6a_3+4a_2^2)2a_2$$
$$+(8a_4+12a_2a_3)\}+(4b_3+4a_2a_4)\{a_5+4a_2a_4+(6a_3+4a_2^2)a_3+(8a_4+12a_2a_3)a_2$$

$$+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)\}+b_4\{12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4\}\,. \tag{21}$$

Aus (19) und (20) bekommen wir

$$2\{(3a_3-2a_2^2)b_1-\bar{b}_1\}+3\{(4a_4-2a_2a_3)b_2-2\bar{a}_2\bar{b}_2\}+4\{(5a_5-2a_2a_4)b_3-3\bar{a}_3\bar{b}_3\}$$
$$+\{(6a_6-2a_2a_5)b_4-4\bar{a}_4\bar{b}_4\}=0\,. \tag{22}$$

Für $s=0$ ist es $b_1(0)=0$, $b_2(0)=0$, $b_3(0)=0$, $b_4(0)=1$. Daher ist aus

$$6a_6(0)-2a_2(0)a_5(0)-4\bar{a}_4(0)=0\,. \tag{23}$$

Dies ist aber nichts anders als der Martysche Satz. Also erhalten wir den folgenden

Satz I. (F. Marty)[6]. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n(a_1=1)$ *sei eine schlichte Funktion in* $|z|<1$ *von der Art, dass die Koeffizient* a_5 *positiv ist, und dass die* a_5 *gleich der kleinsten oberen Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von* z_5 *von allen normierten schlichten Funktionen in* $|z|<1$ *ist. Es gilt dann*

$$6a_6-2a_2a_5-4\bar{a}_4=0\,.$$

Wir differenzieren nun die rechte Seite von der Formel (22) in bezug auf s im Punkte $s=0$. Es ist dann offenbar

$$\begin{aligned}
b'_\mu(s)^{7)} = &-\mu e^{-\mu s}\Bigg\{\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1}p_{i-(\mu+1)}\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}\\
&(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots\, ds_2\,ds_1\Bigg)\Bigg\}+e^{-\mu s}\Bigg\{-2\kappa^{n-\mu}(s)e^{-(n-\mu)s}+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=i}^{n}\\
&p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1}p_{i-(\mu+1)}\Bigg(-2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s)e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s}\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)\\
&e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}-1}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)-1}-p_{i-(\mu+1)}}(s_{i-(\mu+1)})\\
&e^{-(p_{i-(\mu+1)-1}-p_{i-(\mu+1)})s_{i-(\mu+1)}}ds_{i-(\mu+1)}\cdots ds_2\,ds_1\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Folglich ist

$$\left.\begin{aligned}
b'_\mu(0)&=-2\kappa^{n-\mu}(0), \qquad (\mu=1,\,2,\,\cdots,\quad n-2),\\
b'_{n-1}(0)&=-2\kappa(0),\\
b'_n(0)&=-n\,.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Daher folgt aus (25) und (22)

---

6) F. Marty : SUR LE MODULE DES COEFFICIENTS DE MACLAURINE D'UNE FONCTION UNIVALENTE, Comptes Rendus, 198 (1934), S. 1569—1571.

7) $b'_s(s)$ stellt dis Ableitung von $b_\mu(s)$ dar.

$$-2\cdot 2[(3a_3(0)-2a_2^2(0))\kappa^3(0)-\bar{\kappa}^3(0)]-2\cdot 3[(4a_4(0)-2a_2(0)a_3(0))\kappa^2(0) -2a_2(0)\bar{\kappa}^2(0)]-2\cdot 4[(5a_5(0)-2a_2(0)a_4(0))\kappa(0)-3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}(0)]-4[(6a_6(0) -2a_2(0)a_5(0))-4\bar{a}_4(0)]+(6a_6(s)-2a_2(s)a_5(s))'_{s=0}-(4\bar{a}_4')_{s=0}=0. \tag{26}$$

Da die Funktion $g(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)z^n$ der Gleichung (1) genügt, so gilt es

$$\left.\begin{aligned} a_6'(s)&=5a_6(s)+2(\kappa^5(s)+2\kappa^4(s)a_2(s)+3\kappa^3(s)a_3(s)+4\kappa^2(s)a_4(s)+5\kappa(s)a_5(s)),\\ a_2'(s)&=a_2(s)+2\kappa(s),\\ a_5'(s)&=4a_5(s)+2(\kappa^4(s)+2\kappa^3(s)a_2(s)+3\kappa^2(s)a_3(s)+4\kappa(s)a_4(s)),\\ a_4'(s)&=3a_4(s)+2(\kappa^3(s)+2\kappa^2(s)a_2(s)+3\kappa(s)a_3(s)). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Aus (23), (26) und (27) folgt es

$$4\kappa(0)a_5(0)+3\kappa^5(0)+5\kappa^4(0)a_2(0)+6\kappa^3(0)a_3(0)+6\kappa^2(0)a_4(0)+2\bar{a}_4(0) -\bar{\kappa}^3(0)-\bar{a}_2(0)\bar{\kappa}^2(0)=0. \tag{28}$$

Wir setzen nun $n=4$ und $p=8$ in der Formel (14). Es ist dann

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{k=1}^{4-i}k(k+i)\bar{a}_k\bar{b}_{k+i-1}+(5-i)\bar{a}_{5-i}\bar{b}_4\Big)a_{8-i}^{(6)}+\Big(\sum_{k=1}^{4}k(k-1)a_kb_{k-1}+4a_5b_4\Big)a_8^{(6)} +\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{4-i}k(k+i)a_kb_{k+i-1}+(5-i)a_{5-i}b_4\Big)a_{8+i}^{(6)}+b_4a_{12}^{(6)}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3+i}\sum_{l=1}^{j}\Big(\sum_{k=i+1}^{4}a_k^{(i+1)}kb_{k-1} +a_5^{(i+1)}b_4\Big)l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{7-j}^{(4-i)}+b_4\sum_{l=1}^{7}l(8-l)a_la_{8-l}. \tag{29}$$

Wir können die Formel (29) in der Form

$$(\alpha_1b_1+\beta_1\bar{b}_1)+(\alpha_2b_2+\beta_2\bar{b}_2)+(\alpha_3b_3+\beta_3\bar{b}_3)+(\alpha_4b_4+\beta_4\bar{b}_4)=0$$

schreiben. Wir wollen aus (29) die α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3, α_4, β_4 bestimmen.

Die Koeffizient von b_1 in der linken Seite von $(29)=2\cdot 1a_2a_8^{(6)}+1\cdot 2a_1a_9^{(6)}$

$$=2\{a_2(6a_3+15a_2^2)+6a_4+{}_6C_4\cdot 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3\}$$
$$=2(6a_4+36a_2a_3+35a_2^3). \tag{30}$$

Die Koeffizient von b_1 in der rechten Seite von $(29)=a_2^{(2)}2\sum_{j=1}^{4}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{7-j}^{(3)}=2\{\sum_{l=1}^{1}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_6^{(3)}+\sum_{l=1}^{2}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_5^{(3)}+\sum_{l=1}^{3}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_4^{(3)}+\sum_{l=1}^{4}l(j-l+1)a_la_{j-l+1}\}=2\{(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+4a_2(3a_3+3a_2^2)+(6a_3+4a_2^2)3a_2+(8a_4+12a_2a_3)\}=2(11a_4+48a_2a_3+25a_2^3).$ (31)

Aus (30) und (31) folgt

$$\alpha_1=2(5a_4+12a_2a_3-10a_2^3). \tag{32}$$

Es ist offenbar

$$\beta_1=-1\cdot 2\bar{a}_1a_7^{(6)}=-12a_2. \tag{33}$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (29) $= 3\cdot 2a_3 a_8^{(6)} + 2\cdot 3a_2 a_9^{(6)} + 1\cdot 3a_1 a_{10}^{(6)} = 6a_3(6a_3+15a_2^2)+6a_2(6a_4+2{}_6C_4 a_2 a_3 + {}_6C_3 a_2^3)+3\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} = 3\{(12+{}_6C_4)a_3^2+(30+4{}_6C_4+3{}_6C_3)a_2^2 a_3+(12+2{}_6C_4)a_2 a_4 + (2{}_6C_3+{}_6C_2)a_2^4+6a_5\} = 3(27a_3^2+150a_2^2a_3+42a_2a_4+55a_2^4+6a_5)$. (34)

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (29) $= \sum_{j=1}^{4}\sum_{l=1}^{j} a_3^{(2)} 3l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} a_3^{(3)} 3l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{7-j}^{(2)} = 2a_2\cdot 3\{a_1^2(3a_4+6a_2a_3 + a_2^3)+4a_2(3a_3+3a_2^2)+(6a_3+4a_2^2)3a_2+(8a_4+12a_2a_3)\}+3\{a_1^2(2a_5+2a_2a_4+a_3^2) + 4a_2(2a_4+2a_2a_3)+(6a_3+4a_2^2)(2a_3+a_2^2)+(8a_4+12a_2a_3)2a_2+(10a_5+16a_2a_4 + 9a_3^2)\} = 6a_2(11a_4+48a_2a_3+25a_2^3)+3(12a_5+42a_2a_4+46a_2^2a_3+22a_3^2+4a_2^4) = 3(64a_2a_4+142a_2^2a_3+54a_2^4+22a_3^2+12a_5)$. (35)

Aus (34) und (35) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(6a_5-5a_3^2-a_2^4-8a_2^2a_3+22a_2a_4)b_2\,. \tag{36}$$

Es ist aber

$$\beta_2 = -(2\cdot 3\bar{a}_2 a_7^{(6)}+1\cdot 3\bar{a}_1 a_8^{(6)}) = -3(12a_2\bar{a}_2+1). \tag{37}$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (29) $= 4\cdot 3a_4 a_8^{(6)} + 3\cdot 4a_3 a_9^{(6)}+2\cdot 4a_2 a_{10}^{(6)}+1\cdot 4a_1 a_{11}^{(6)} = 12a_4(6a_3+15a_2^2)+12a_3\{6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3\} + 8a_2\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+4\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\} = 4(66a_3a_4+165a_2^2a_4+180a_2a_3^2+240a_3a_2^3 + 42a_2a_5+36a_2^5+6a_6)$. (38)

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (29) $= \sum_{j=1}^{4}\sum_{l=1}^{j} a_4^{(3)} 4l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} a_4^{(3)} 4l(j-l+1)a_{7-j}^{(2)} + \sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} a_4^{(4)} 4l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{7-j}^{(1)} = 4(2a_3+a_2^2)\{a_1^2(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+4a_2(3a_3+3a_2^2)+(6a_3+4a_2^2)3a_2+(8a_4+12a_2a_3)\} + 4\cdot 3a_2\{a_1^2(2a_5+2a_2a_4+a_3^2)+4a_2(2a_4+2a_2a_3)+(6a_3+4a_2^2)(2a_3+a_2^2)+(8a_4+ 12a_2a_3)2a_2+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)\}+4\{(a_6+4a_2a_5)+(6a_3+4a_2^2)a_4+(8a_4+ 12a_2a_3)a_3+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)a_2+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)\} = 4(2a_3+a_2^2)(11a_4 + 48a_2a_3+25a_2^3)+12a_2(12a_5+42a_2a_4+46a_2^2a_3+22a_3^2+4a_2^4)+4(13a_6+34a_2a_5+ 38a_3a_4+20a_2^2a_4+21a_2a_3^2) = 4(60a_3a_4+157a_2^2a_4+183a_2a_3^2+236a_2^3a_3+37a_2^5+70a_2a_5 + 13a_6)$. (39)

Aus (38) und (39) folgt ohne weiteres

$$\alpha_3 = 4(7a_6+28a_2a_5+a_2^5-4a_2^3a_3+3a_2a_3^2-8a_2^2a_4-6a_3a_4). \tag{40}$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_3 = -(3\cdot 4\bar{a}_3 a_7^{(6)}+2\cdot 4\bar{a}_2 a_8^{(6)}) = -4(18\bar{a}_3 a_2+2\bar{a}_2). \tag{41}$$

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (29) $= 4a_5 a_8^{(6)} + 4a_4 a_9^{(6)} + 3a_3 a_{10}^{(6)} + 2a_2 a_{11}^{(6)} + a_{12}^{(6)} = 4a_5(6a_3 + 15a_2^2) + 4a_4(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3 a_2^3) + 3a_3\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} + 2a_2\{6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3a_3 + {}_6C_1 a_2^5\} + \{6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 3a_2 2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2 a_2^2a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4a_3 + a_2^6\} = 72a_3a_5 + 180a_2^2a_5 + 39a_4^2 + 390a_2a_3a_4 + 260a_2^3a_4 + 65a_3^3 + 390a_2^2a_3^2 + 195a_3a_2^4 + 13a_2^6 + 42a_2a_6 + 6a_7.$ (42)

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (29) $= \sum_{j=1}^{4}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_5^{(2)} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_5^{(3)} a_{7-j}^{(2)} + \sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_5^{(4)} a_{7-j}^{(1)} + \sum_{l=1}^{7} l(8-l)a_l a_{8-l} = (2a_4 + 2a_2a_3)\{a_1^2(3a_4 + 6a_2a_3 + a_2^3) + 4a_2(3a_3 + 3a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2)3a_2 + (8a_4 + 12a_2a_3)\} + (3a_3 + 3a_2^2)\{a_1^2(2a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2) + 4a_2(2a_4 + 2a_2a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_3 + a_2^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)2a_2 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)\} + 4a_2\{(a_6 + 4a_2a_5) + (6a_3 + 4a_2^2)a_4 + (8a_4 + 12a_2a_3)a_3 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)a_2 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)\} + (14a_7 + 24a_2a_6 + 30a_3a_5 + 16a_4^2) = 38a_4^2 + 396a_2a_3a_4 + 384a_2^2a_3^2 + 256a_2^3a_4 + 200a_3a_2^4 + 66a_3a_5 + 172a_2^2a_5 + 66a_3^3 + 12a_2^6 + 76a_2a_6 + 14a_7.$ (43)

Aus (42) und (43) folgt ohne weiteres

$$\alpha_4 = 8a_7 + 34a_2a_6 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2a_5 - 6a_3a_5 + 5a_3a_2^4 - 4a_2^3a_4 - 6a_2^2a_3^2 + 6a_2a_3a_4 - a_4^2. \tag{44}$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_4 = -(4\bar{a}_4 a_7^{(6)} + 3\bar{a}_3 a_6^{(6)}) = -(4\bar{a}_4 \cdot 6a_2 + 3\bar{a}_3). \tag{45}$$

Nach (32), (33), (36), (37), (40), (41), (44) und (45) besteht

$$2(5a_4 + 12a_2a_3 - 10a_2^3)b_1 - 2\cdot 6a_2\bar{b}_1 + 3(6a_5 + 22a_2a_4 - 5a_3^2 - a_2^4 - 8a_2^2a_3)b_2 - 3(12a_2\bar{a}_2 + 1)\bar{b}_2 + 4(7a_6 + 28a_2a_5 + 3a_2a_3^2 + a_2^5 - 4a_2^3a_3 - 8a_2^2a_4 - 6a_3a_4)b_3 - 4(18a_2\bar{a}_3 + 2\bar{a}_2)\bar{b}_3 + (8a_7 + 34a_2a_6 + 5a_3a_2^4 + 6a_2a_3a_4 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2a_5 - 6a_3a_5 - 4a_2^3a_4 - 6a_2^2a_3^2 - a_4^2)b_4 - (24a_2\bar{a}_4 + 3\bar{a}_3)\bar{b}_4 = 0. \tag{46}$$

Wir setzen $s = 0$ in (46), so gewinnen wir

$$8a_7(0) + 34a_2(0) + 5a_3(0)a_2(0)^4 + 6a_2(0)a_3(0)a_4(0) - a_2(0)^6 + a_3(0)^3 - 8a_2(0)^2a_5(0) - 6a_3(0)a_5(0) - 4a_2(0)^3a_4(0) - 6a_2(0)^2a_3(0)^2 - a_4(0)^2 - 24a_2(0)\bar{a}_4(0) - 3\bar{a}_3(0) = 0. \tag{47}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (46) in bezug auf s am Punkte $s = 0$. Wir gewinnen dann

$$- 4(5a_4(0) + 12a_2(0)a_3(0) - 10a_2(0)^3)\kappa^3(0) + 4\cdot 6a_2(0)\bar{\kappa}(0)^3 - 6(6a_5(0) + 22a_2(0)a_4(0) - 5a_3(0)^2 - a_2(0)^4 - 8a_2(0)^2a_3(0))\kappa^2(0) + 6(12a_2(0)\bar{a}_3(0) + 1)\bar{\kappa}(0)^2 - 8(7a_6(0) + 28a_2(0)a_5(0) + 3a_2(0)a_3(0)^2 + a_2(0)^5 - 4a_2(0)^3a_3(0) - 8a_2(0)^2a_4(0)$$

$$- 6a_3(0)a_4(0))\kappa(0) + 8(18a_2(0)\bar{a}_3(0) + 2\bar{a}_2(0))\bar{\kappa}(0) - 4\{(8a_7(0) + 34a_2(0)a_6(0) + 5a_3(0)a_2(0)^4 + 6a_2(0)a_3(0)a_4(0) - a_2(0)^6 + a_3(0)^3 - 8a_2(0)^2a_5(0) - 6a_3(0)a_5(0) - 4a_2(0)^3a_4(0) - 6a_2(0)^2a_3(0)^2 - a_4(0)^2 - (24a_2(0)\bar{a}_4(0) + 3\bar{a}_3(0))\} + (8a_7 + 34a_2a_6 + 5a_3a_2^4 + 6a_2a_3a_4 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2a_5 - 6a_3a_5 - 4a_2^3a_4 - 6a_2^2a_3^2)'_{s=0} - (24a_2\bar{a}_4 + 3\bar{a}_3)'_{s=0} = 0. \tag{48}$$

Es ergibt sich dann aus (47) und (48)

$$3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}(0)^2 - 3a_3(0)\kappa(0)^2 + 2\bar{a}_4(0)\bar{\kappa}(0) - 2a_4(0)\kappa(0) + 3\bar{a}_2(0)\bar{\kappa}(0)^3 - 3a_2(0)\kappa(0)^3 + 2\bar{\kappa}(0)^4 - 2\kappa(0)^4 = 0 \tag{49}$$

D. h. $3a_3(0)\kappa^2(0) + 2a_4(0)\kappa(0) + 3a_2(0)\kappa^3(0) + 2\kappa^4(0)$ ist rell. Also gewinnen wir den folgenden

Satz II[8]. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n (a_1 = 1)$ *sei eine schlichte Funktion in* $|z|<1$ *von der Art, dass die Koeffizient* a_5 *positiv ist, und dass die* a_5 *gleich der kleinsten oberen Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von* z^5 *von allen normierten schlichten Funktionen in* $|z|<1$ *ist. Die* $2a_4\kappa(0) + 3a_3\kappa^2(0) + 3a_2\kappa^3(0) + 2\kappa^4(0)$ *ist dann reell.*

Wir setzen nun $n=4$ und $p=9$ in der Formel (14). Es ist dann

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)\bar{a}_k\bar{b}_{k+i-1} + (5-i)\bar{a}_{5-i}\bar{b}_4\Big)a_{9-i}^{(6)} + \Big(\sum_{k=1}^{4} k(k-1)a_k b_{k-1} + 4a_5 b_4\Big)a_9^{(6)} + \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} + (5-i)a_{5-i}b_4\Big)a_{9+i}^{(6)} + b_4 a_{13}^{(6)} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4+i}\sum_{l=1}^{j}\Big(\sum_{k=i+1}^{n} a_k^{(i+1)} k b_{k-1} + a_5^{(i+1)} b_4\Big) l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{8-j}^{(4-i)} + b_4 \sum_{l=1}^{8} l(9-l)a_l a_{9-l}. \tag{50}$$

Wir können die Formel (50) in der Form

$$(\alpha_1 b_1 + \beta_1\bar{b}_1) + (\alpha_2 b_2 + \beta_2\bar{b}_2) + (\alpha_3 b_3 + \beta_3\bar{b}_3) + (\alpha_4 b_4 + \beta_4\bar{b}_4) = 0$$

schreiben. Wir wollen aus (50) die $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ bestimmen.

Die Koeffizient von b_1 in der linken Seite von (50) $= 2\cdot 1 a_2 a_9^{(6)} + 1\cdot 2 a_1 a_{10}^{(6)} = 2a_2(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3 a_2^3) + 2\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} = 2(6a_5 + 36a_2a_4 + 90a_2^2a_3 + 35a_2^4 + 15a_3^2).$ (51)

Die Koeffizient von b_1 in der rechten Seite von (50) $= a_2^{(2)} 2\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{8-j}^{(3)} = 2[\{3a_5 + 3(2a_2a_4 + a_3^2) + 3a_2^2a_3\} + 4a_2(3a_4 + 6a_2a_3 + a_2^3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)] = 2(13a_5 + 58a_2a_4 + 93a_2^2a_3 + 16a_2^4 + 30a_3^2).$ (52)

Aus (51) und (52) folgt ohne weiteres

$$\alpha_1 = 2(7a_5 + 22a_2a_4 + 3a_2^2a_3 - 19a_2^4 + 15a_3^2). \tag{53}$$

---

8) Den Satz II können wir aus nur der Löwnerschen Differentialgleichung auch herleiten.

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_1 = -1\cdot 2\bar{a}_1 a_8^{(6)} = -2(6a_3+15a_2^2). \tag{54}$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (50) $=3\cdot 2a_3a_9^{(6)}+2\cdot 3a_2a_{10}^{(6)} + 1\cdot 3a_1a_{11}^{(6)} = 3\cdot 2a_3(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+2\cdot 3a_2\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+3a_1\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\} = 3(42a_3a_4+120a_2^2a_4+42a_2a_5+150a_2a_3^2+220a_2^3a_3+36a_2^5+6a_6).$ (55)

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (50) $= a_3^{(2)}3\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(3)} + a_3^{(3)}3\sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(2)} = 2a_3\cdot 3[\{3a_5+3(2a_2a_4+a_3^2)+3a_2^2a_3\}+4a_2(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+(6a_3+4a_2^2)(3a_3+3a_2^2)+(8a_4+12a_2a_3)3a_2+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)]+3[(2a_6+2a_2a_5+2a_3a_4)+4a_2(2a_5+2a_2a_4+a_3^2)+(6a_3+4a_2^2)(2a_4+2a_2a_3)+(8a_4+12a_2a_3)(2a_3+a_2^2)+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)2a_2+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)] = 3(14a_6+76a_2a_5+172a_2^2a_4+206a_2^3a_3+32a_2^5+118a_2a_3^2+54a_3a_4).$ (56)

Aus (55) und (56) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(8a_6+34a_2a_5+52a_2^2a_4-14a_2^3a_3-4a_2^5-32a_2a_3^2+12a_3a_4. \tag{57}$$

Es ist aber

$$\beta_2 = -(2\cdot 3\bar{a}_2a_8^{(6)}+1\cdot 3\bar{a}_1a_7^{(6)}) = -3\{2\bar{a}_2(6a_3+15a_2^2)+\bar{a}_1 6a_2\}. \tag{58}$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (50) $= 4\cdot 3a_4a_9^{(6)}+3\cdot 4a_3a_{10}^{(6)}+2\cdot 4a_2a_{11}^{(6)}+1\cdot 4a_1a_{12}^{(6)} = 4\cdot 3a_4(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_2a_2^3)+3\cdot 4a_3\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+2\cdot 4a_2\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\}+1\cdot 4a_1\{6a_7+{}_6C_4(2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)+{}_6C_3(3a_2^2a_5+6a_2a_3a_4+a_3^3)+{}_6C_2(4a_2^3a_4+{}_4C_2a_2^2a_3^2)+{}_6C_1 5a_2^4a_3+a_2^6\} = 4(33a_4^2+360a_2a_3a_4+240a_2^3a_4+48a_3a_5+65a_3^3+390a_2^2a_3^2+195a_3a_2^4+42a_2a_6+120a_2^2a_5+13a_2^6+6a_7).$ (59)

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (50) $= a_4^{(2)}4\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(3)} + a_4^{(3)}4\sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(2)} + a_4^{(4)}4\sum_{j=1}^{7}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(1)} = 4(2a_3+a_2^2)\{a_1^2(3a_5+6a_2a_4+3a_3^2+3a_2^2a_3)+4a_2(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+(6a_3+4a_2^2)(3a_3+3a_2^2)+(8a_4+12a_2a_3)3a_2+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)\}+4\cdot 3a_2\{(2a_6+2a_2a_5+2a_3a_4)+4a_2(2a_5+2a_2a_4+a_3^2)+(6a_3+4a_2^2)(2a_4+2a_2a_3)+(8a_4+12a_2a_3)(2a_3+a_2^2)+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)2a_2+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)\}+4\{a_1^2a_7+4a_2a_6+(6a_3+4a_2^2)a_5+(8a_4+12a_2a_3)a_4+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)a_3+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)a_2+(14a_7+24a_2a_6+30a_3a_5+16a_4^2)\} = 4(72a_2a_7+187a_2^2a_5+330a_2a_3a_4+390a_2^2a_3^2+226a_2^3a_4+185a_2^4a_3+82a_2a_6+185a_2^4a_3+82a_2a_6+69a_3^3+24a_4^2+16a_2^6+15a_7).$ (60)

Aus (59) und (60) folgt es

$$\alpha_3 = 4(9a_7 + 3a_2^6 + 67a_2^2a_5 + 40a_2a_6 - 10a_3a_2^4 + 4a_3^3 + 24a_3a_5 - 14a_2^3a_4 - 30a_2a_3a_4 - 9a_4^2). \tag{61}$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_3 = -(3\cdot 4\bar{a}_3a_8^{(6)} + 2\cdot 4\bar{a}_2a_7^{(6)} + 1\cdot 4\bar{a}_1a_6^{(6)}) = -4\{3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) + 12a_2\bar{a}_2 + \bar{a}_1\}. \tag{62}$$

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (50) $= 4a_5a_9^{(6)} + 4a_4a_{10}^{(6)} + 3a_3a_{11}^{(6)} + 2a_2a_{12}^{(6)} + a_{13}^{(6)} = 4a_5(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3a_2^3) + 4a_4\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2a_2^4\} + 3a_3\{6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3a_3 + {}_6C_1a_2^5\} + 2a_2\{6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2a_2^2a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4a_3 + a_2^6\} + \{6a_8 + {}_6C_4(2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5) + {}_6C_3(3a_2^2a_6 + 6a_2a_3a_5 + 3a_2a_4^2 + 3a_3^2a_4) + {}_6C_2(4a_2^3a_5 + 2{}_4C_2a_2^2a_3a_4 + 4a_2a_3^3) + {}_6C_1(5a_2^4a_4 + {}_5C_3a_2^3a_3^2) + 6a_2^5a_3\} =$
$78a_4a_5 + 390a_2a_3a_5 + 260a_5a_2^3 + 210a_2a_4^2 + 210a_4a_3^2 + 840a_2^2a_3a_4 + 210a_2^4a_4 + 420a_2^3a_3^2 + 48a_3a_6 + 84a_2^5a_3 + 42a_2a_7 + 120a_2^2a_6 + 280a_2a_3^3 + 2a_2^7 + 6a_8.$ (63)

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (50) $= \sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{j} a_5^{(2)}\, l(i-l+1)a_la_{j-l+1}a_{8-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} a_5^{(3)}\, l(j-l+1)a_l a_{j-l+1}a_{8-j}^{(2)} + \sum_{j=1}^{7}\sum_{l=1}^{j} a_5^{(4)}\, l(j-l+1) a_l a_{j-l+1}a_{8-j}^{(1)} + \sum_{l=1}^{8} l(9-l)a_l a_{9-l} = 2(a_4 + 2a_2a_3)\,\{a_1^2(3a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 + 3a_2^2a_3) + 4a_2(3a_4 + 6a_2a_3 + a_2^3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)\} + (3a_3 + 3a_2^2)\,\{a_1^2(2a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4) + 4a_2(2a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_4 + 2a_2a_3) + (8a_4 + 12a_2a_3)(2a_3 + a_2^2) + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)2a_2 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)\} + 4a_2\{a_1^2a_7 + 4a_2a_6 + (6a_3 + 4a_2^2)a_5 + (8a_4 + 12a_2a_3)a_4 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)a_3 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)a_2 + (14a_7 + 24a_2a_6 + 30a_3a_5 + 16a_4^2)\} + (16a_8 + 28a_2a_7 + 36a_3a_6 + 40a_4a_5) = 66a_4a_5 + 360a_2a_3a_5 + 212a_2a_4^2 + 840a_2^2a_3a_4 + 420a_2^3a_3^2 + 222a_3^2a_4 + 270a_2a_3^3 + 200a_4a_2^4 + 92a_2^5a_3 + 78a_3a_6 + 202a_2^2a_6 + 246a_2^3a_5 + 88a_2a_7 + 16a_8.$ (64)

Aus (63) und (64) folgt ohne weiteres

$$\alpha_4 = 10a_8 - 2a_2^7 - 10a_2a_3^3 + 82a_2^2a_6 + 46a_2a_7 + 8a_2^5a_3 + 30a_3a_6 - 10a_2^4a_4 + 12a_4a_3^2 + 2a_2a_4^2 - 14a_5a_2^3 - 30a_2a_3a_5 - 12a_4a_5. \tag{65}$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_4 = -(4\bar{a}_4a_8^{(6)} + 3\bar{a}_3a_7^{(6)} + 2\bar{a}_2a_6^{(6)}) = -\{4a_4(6a_3 + 15a_2^2) + 18\bar{a}_3a_2 + 2\bar{a}_2\}. \tag{66}$$

Aus (53), (54), (57), (58), (61), (62), (65) und (66) besteht es

$$2(7a_5 + 22a_2a_4 + 3a_2^2a_3 - 19a_2^4 + 15a_3^2)b_1 - 2(6a_3 + 15a_2^2)\bar{b}_1 + 3(8a_6 + 34a_2a_5 + 52a_2^2a_4 - 14a_2^3a_3 - 4a_2^5 - 32a_2a_3^2 + 12a_3a_4)b_2 - 3\,\{2\bar{a}_2(6a_3 + 15a_2^2) + \bar{a}_1\cdot 6a_2\}\,\bar{b}_2$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 10 [1960], Iss. 2, Art. 4

$$+4(9a_7+3a_2^6+67a_2^2a_5+40a_2a_6-10a_3a_2^4+4a_3^3+24a_3a_5-14a_2^3a_4-30a_2a_3a_4$$
$$-9a_4^2)b_3-4\{3\bar{a}_3(6a_3+15a_2^2)+12\bar{a}_2a_2+\bar{a}_1\}\bar{b}_3+(10a_8-2a_2^7-10a_2a_3^3+82a_2^2a_6$$
$$+46a_2a_7+8a_2^5a_3+30a_3a_6-10a_2^4a_4+12a_4a_3^2+2a_2a_4^2-14a_5a_2^3-30a_2a_3a_5-12a_4a_5)b_4$$
$$-\{4\bar{a}_4(6a_3+15a_2^2)+3\bar{a}_3\cdot 6a_2+2\bar{a}_2\}\bar{b}_4=0. \tag{67}$$

Wir setzen $s=0$ in (67), so gewinnen wir

$$10a_8(0)-2a_2(0)^7-10a_2(0)a_3(0)^3+82a_2(0)^2a_6+46a_2(0)a_7(0)+8a_2(0)^5a_3(0)$$
$$+30a_3(0)a_6(0)-10a_2(0)^4a_4(0)+12a_4(0)a_3(0)^2+2a_2(0)a_4(0)^2-14a_5(0)a_2(0)^3$$
$$-30a_2(0)a_3(0)a_5(0)-12a_4(0)a_5(0)-4\bar{a}_4(0)(6a_3(0)+15a_2(0)^2)-18\bar{a}_3(0)a_2(0)$$
$$-2\bar{a}_2(0)=0. \tag{68}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (67) in bezug auf s am Punkte $s=0$. Wir gewinnen dann

$$-4(7a_5(0)+22a_2(0)a_4(0)+3a_2(0)^2a_3(0)-19a_2(0)^4+15a_3(0)^2)\kappa^3(0)+4(6a_3(0)$$
$$+15a_2(0)^2)\bar{\kappa}^3(0)-6(8a_6(0)+34a_2(0)a_5(0)+52a_2(0)^2a_4(0)-14a_2(0)^3a_3(0)-4a_2(0)^5$$
$$-32a_2(0)a_3(0)^2+12a_3(0)a_4(0))\kappa^2(0)+6\{2\bar{a}_2(0)(6a_3(0)+15a_2(0)^2+6a_2(0))\bar{\kappa}^2(0)$$
$$-8(9a_7(0)+3a_2(0)^6+67a_2(0)^2a_5(0)+40a_2(0)a_6(0)-10a_3(0)a_2(0)^4+4a_3(0)^3$$
$$+24a_3(0)a_5(0)-14a_2(0)^3a_4(0)-30a_2(0)a_3(0)a_4(0)-9a_4^2(0))\kappa(0)+8\{3\bar{a}_3(0)(6a_3(0)$$
$$+15a_2(0)^2)+12\bar{a}_2(0)a_2(0)+\bar{a}_1(0)\}\bar{\kappa}(0)+(10a_8-2a_2^7-10a_2a_3^3+82a_2^2a_6+46a_2a_7$$
$$+8a_2^5a_3+30a_3a_6-10a_2^4a_4+12a_4a_3^2+2a_2a_4^2-14a_5a_2^3-30a_2a_3a_5-12a_4a_5)'_{s=0}-$$
$$\{4\bar{a}_4(6a_3+15a_2^2)+18\bar{a}_3a_2+2\bar{a}_2\}'_{s=0}=0. \tag{69}$$

Aus (23), (28), (47), (69) und (68) ergibt sich

$$(2\kappa^4(0)-2\bar{\kappa}^4(0))+(3a_2(0)\kappa^3(0)-3\bar{a}_2(0)\bar{\kappa}^3(0)+(3a_3(0)\kappa^2(0)-3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}^2(0))$$
$$+(2a_4(0)\kappa(0)-2\bar{a}_4(0)\bar{\kappa}(0))=0.$$

Dies ist aber nichts anders als die Formel (49).

Wir setzen nun $n=4$ und $p=10$ in (15). Es folgt dann aus (15)

$$\bar{b}_4a_6^{(6)}+\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{4-i}k(k+i)\bar{a}_k\bar{b}_{k+i-1}+(5-i)\bar{a}_{5-i}\bar{b}_4\Big)a_{10-i}^{(6)}+\Big(\sum_{k=1}^{4}k(k-1)a_kb_{k-1}$$
$$+4a_5b_4\Big)a_{10}^{(6)}+\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{4-i}k(k+i)a_kb_{k+i-l}+(5-i)a_{5-i}b_4\Big)a_{10+i}^{(6)}+b_4a_{14}^{(6)}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5+i}\sum_{l=1}^{j}\Big(\sum_{k=i+1}^{n}$$
$$a_k^{(i+1)}kb_{k-1}+a_5^{(i+1)}b_4\Big)l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{9-j}^{(4-i)}+b_4\sum_{l=1}^{9}l(p-l)a_la_{p-l}. \tag{70}$$

Wir können die Formel (70) in der Form

$$(\alpha_1b_1+\beta_1\bar{b}_1)+(\alpha_2b_2+\beta_2\bar{b}_2)+(\alpha_3b_3+\beta_3\bar{b}_3)+(\alpha_4b_4+\beta_4\bar{b}_4)=0$$

schreiben. Wir wollen nun die $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ berechnen.

Die Koeffizient von b_1 in der linken Seite von $(70)=2\cdot 1a_2a_{10}^{(6)}+1\cdot 2a_1a_{11}^{(6)}$

$$=2a_2\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+2\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+$$
$${}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\}=2(6a_6+36a_2a_5+30a_3a_4+90a_2^2a_4+75a_2a_3^2$$
$$+120a_2^3a_3+21a_2^5). \tag{71}$$

Die Koeffizient von b_1 in der rechten Seite von (70) $= a_2^{(2)} \sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_l a_{j-l+1} a_{9-j}^{(3)} = 2\{a_1^2(3a_6+6a_2a_5+6a_3a_4+3a_2a_3^2+3a_2^2a_4)+4a_2(3a_5+6a_2a_4+3a_3^2+3a_2^2a_3)+(6a_3+4a_2^2)(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+(8a_4+12a_2a_3)(3a_3+3a_2^2)+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)3a_2+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)\} = 2(15a_6+68a_2a_5+72a_3a_4+111a_2^2a_4+114a_2a_3^2+78a_2^3a_3+4a_2^5).$ (72)

Aus (71) und (72) ergibt sich

$$\alpha_1 = 2(9a_6+32a_2a_5+42a_3a_4+21a_2^2a_4+39a_2a_3^2-42a_2^3a_3-17a_2^5). \quad (73)$$

Wir können leicht einsehen

$$\beta_1 = -1\cdot 2\bar{a}_1 a_9^{(6)} = -2(6a_4+30a_2a_3+20a_2^3). \quad (74)$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (70) $=3\cdot 2a_3a_{10}^{(6)}+2\cdot 3a_2a_{11}^{(6)}+1\cdot 3a_1a_{12}^{(6)} = 3\cdot 2a_3\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+2\cdot 3a_2\{6a_6+{}_5C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\}+3a_1\{6a_7+{}_6C_4(2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)+{}_6C_3(3a_2^2a_5+6a_2a_3a_4+a_3^3)+{}_6C_2(4a_2^3a_4+{}_4C_2a_2^2a_3^2)+{}_6C_1 5a_2^4a_3+a_2^6\} = 3(6a_7+42a_2a_6+42a_3a_5+15a_4^2+120a_2^2a_5+240a_2a_3a_4+50a_3^3+180a_2^3a_4+330a_2^2a_3^2+180a_2^4a_3+13a_2^6).$ (75)

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (70) $= a_3^{(2)}\cdot 3\sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{9-j}^{(3)} + a_3^{(3)}\cdot 3\sum_{j=1}^{7}\sum_{l=1}^{j} l(j-l+1)a_la_{j-l+1}a_{9-j}^{(2)} = 3\cdot 2a_2\{a_1^2(3a_6+6a_2a_5+6a_3a_4+3a_2a_3^2+3a_2^2a_4)+4a_2(3a_5+6a_2a_4+3a_3^2+3a_2^2a_3)+(6a_3+4a_2^2)(3a_4+6a_2a_3+a_2^3)+(8a_4+12a_2a_3)(3a_3+3a_2^2)+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)3a_2+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)\}+3\{a_1^2(2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2+2a_7)+4a_2(2a_6+2a_2a_5+2a_3a_4)+(6a_3+4a_2^2)(2a_5+2a_2a_4+a_3^2)+(8a_4+12a_2a_3)(2a_4+2a_2a_3)+(10a_5+16a_2a_4+9a_3^2)(2a_3+a_2^2)+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)2a_2+(14a_7+24a_2a_6+30a_3a_5+16a_4^2)\} = 3(16a_7+88a_2a_6+64a_3a_5+33a_4^2+202a_2^2a_5+284a_2a_3a_4+246a_2^3a_4+24a_3^3+265a_2^2a_3^2+156a_2^4a_3+8a_2^6).$ (76)

Aus (75) und (76) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(10a_7+46a_2a_6+22a_3a_5+18a_4^2+82a_2^2a_5+44a_2a_3a_4+66a_2^3a_4-26a_3^3-65a_2^2a_3^2-24a_2^4a_3-5a_2^6. \quad (77)$$

Wir können leicht finden

$$\beta_2 = -(2\cdot 3\bar{a}_2a_9^{(6)}+1\cdot 3\bar{a}_1a_8^{(6)}) = -3\{2\bar{a}_2(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+\bar{a}_1(6a_3+15a_2^2)\}.$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (70) $=4\cdot 3a_4a_{10}^{(6)}+3\cdot 4a_3a_{11}^{(6)}+2\cdot 4a_2a_{12}^{(6)}+1\cdot 4a_1a_{13}^{(6)} = 4\cdot 3a_4\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+3\cdot 4a_3\{6a_6+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\}+2\cdot 4a_2\{6a_7+{}_6C_4(2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)+{}_6C_3(3a_2^2a_5+6a_2a_3a_4+a_3^3)+{}_6C_2(4a_2^3a_4+{}_4C_2a_2^2a_3^2)+{}_6C_1 5a_2^4a_3+a_2^6\}+1\cdot 4a_1\{6a_8+{}_6C_4(2a_2a_7+2a_3a_6+2a_4a_5)+{}_6C_3(3a_2^2a_6+6a_2a_3a_5+3a_2a_4^2+$

$3a_3^2a_4)+{}_6C_2(4a_2^3a_5+2{}_4C_2a_2^2a_3a_4+4a_2a_3^3)+{}_6C_1(5a_2^4a_4+{}_5C_3a_2^3a_3^2)+6a_2^5a_3\}=4(6a_8$
$+42a_2a_7+48a_3a_6+48a_4a_5+120a_2^2a_6+270a_2a_3a_5+180a_2a_4^2+195a_3^2a_4+180a_2^3a_5$
$+780a_2^2a_3a_4+280a_2a_3^3+195a_2^4a_4+420a_2^3a_3^2+84a_2^5a_3+2a_2^7).$ (79)

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (70) $=a_4^{(2)}\cdot 4\sum_{j=1}^{9}\sum_{l=1}^{j}l(j-l$ $+1)a_l a_{j-l+1}a_{9-j}^{(3)}+a_4^{(3)}4\sum_{j=1}^{7}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_l a_{j-l+1}a_{9-j}^{(2)}+a_4^{(4)}4\sum_{j=1}^{8}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+$ $1)a_l a_{j-l+1}a_{9-j}^{(1)}=4(2a_3+a_2^2)(15a_6+68a_2a_5+72a_3a_4+111a_2^2a_4+114a_2a_3^2+78a_2^3a_3$
$+4a_2^5)+4\cdot 3a_2(16a_7+58a_2a_6+64a_3a_5+33a_4^2+66a_2^2a_5+140a_2a_3a_4+24a_3^3+24a_2^3a_4$
$+37a_3^2a_2^2)+4\{a_1^2a_8+4a_2a_7+(6a_3+4a_2^2)a_6+(8a_4+12a_2a_3)a_5+(10a_5+16a_2a_4$
$+9a_3^2)a_4+(12a_6+20a_2a_5+24a_3a_4)a_3+(14a_7+24a_2a_6+30a_3a_5+16a_4^2)a_2+(16a_8$
$+28a_2a_7+36a_3a_6+40a_4a_5)\}=4(17a_8+94a_2a_7+84a_3a_6+58a_4a_5+217a_2^2a_6$
$+390a_2a_3a_5+131a_2a_4^2+117a_3^2a_4+381a_3^2a_2^3+183a_2^4a_4+300a_2a_3^3+714a_2^2a_3a_4$
$+266a_2^3a_5+86a_2^5a_3+4a_2^7).$ (80)

Aus (79) und (80) ergibt sich

$\alpha_3=4(11a_8+52a_2a_7+36a_3a_6+10a_4a_5+97a_2^2a_6+120a_2a_3a_5-49a_2a_4^2-18a_3^2a_4$
$-39a_3^2a_2^3-12a_2^4a_4+20a_2a_3^3-66a_2^2a_3a_4+86a_2^3a_5+2a_2^5a_3+2a_2^7).$ (81)

Anderseits finden wir

$\beta_3=-(3\cdot 4\bar{a}_3a_9^{(6)}+2\cdot 4\bar{a}_2a_8^{(6)}+1\cdot 4\bar{a}_1a_7^{(6)})=-4\{3\bar{a}_3(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)$
$+2\bar{a}_2(6a_3+15a_2^2)+\bar{a}_1 6a_2\}.$ (82)

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (70) $=4a_5a_{10}^{(6)}+4a_4a_{11}^{(6)}$ $+3a_3a_{12}^{(6)}+2a_2a_{13}^{(6)}+a_{14}^{(6)}=4a_5\{6a_5+{}_6C_4(2a_2a_4+a_3^2)+{}_6C_3 3a_2^2a_3+{}_6C_2a_2^4\}+4a_4\{6a_6$
$+{}_6C_4(2a_2a_5+2a_3a_4)+{}_6C_3(3a_2^2a_4+3a_2a_3^2)+{}_6C_2 4a_2^3a_3+{}_6C_1a_2^5\}+3a_3\{6a_7+{}_6C_4(2a_2a_6$
$+2a_3a_5+a_4^2)+{}_6C_3(3a_2^2a_5+6a_2a_3a_4+a_3^3)+{}_6C_2(4a_2^3a_4+{}_4C_2a_2^2a_3^2)+{}_6C_1 5a_2^4a_3+a_2^6\}+2a_2$
$\{6a_8+{}_6C_4(2a_2a_7+2a_3a_6+2a_4a_5)+{}_6C_3(3a_2^2a_6+6a_2a_3a_5+3a_2a_4^2+3a_3^2a_4)+{}_6C_2(4a_2^3a_5$
$+2{}_4C_2a_2^2a_3a_4+4a_2a_3^3)+{}_6C_1(5a_2^4a_4+{}_5C_3a_2^3a_3^2)+6a_2^5a_3\}+\{6a_9+{}_6C_4(2a_2a_8+2a_3a_7+$
$2a_4a_6+a_5^2)+{}_6C_3(3a_2^2a_7+6a_2a_3a_6+6a_2a_4a_5+3a_3^2a_5+3a_3a_4^2)+{}_6C_2(4a_2^3a_6+{}_4C_2 2a_2^2a_3a_5$
$+{}_4C_2a_3^2a_4^2+12a_2a_3^2a_4+a_3^4)+{}_6C_1(5a_2^4a_5+{}_5C_3 2a_2^3a_3a_4+{}_5C_2a_2^2a_3^3)+6a_2^5a_4+{}_6C_2a_2^4a_3^2\}=$
$6a_9+42a_2a_8+48a_3a_7+54a_4a_6+39a_5^2+120a_2^2a_7+270a_2a_3a_6+420a_2a_4a_5+210a_3^2a_5$
$+225a_3a_4^2+180a_2^3a_6+840a_2^2a_3a_5+450a_2^2a_4^2+900a_2a_3^2a_4+75a_3^4+210a_2^4a_5+900a_2^3a_3a_4$
$+450a_2^2a_3^3+90a_2^5a_4+225a_2^4a_3^2+15a_2^6a_3.$ (83)

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (70) $=a_5^{(2)}\sum_{j=1}^{6}\sum_{l=1}^{j}l(j-l$ $+1)a_l a_{j-l+1}a_{9-j}^{(3)}+a_5^{(3)}\sum_{j=1}^{7}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_l a_{j-l+1}a_{9-j}^{(2)}+a_5^{(4)}\sum_{j=1}^{8}\sum_{l=1}^{j}l(j-l+1)a_l a_{j-l+1}$ $a_{9-j}^{(1)}+\sum_{l=1}^{9}l(p-l)a_l a_{p-l}=(a_4+2a_2a_3)(15a_6+68a_2a_5+72a_3a_4+111a_2^2a_4+114a_2a_3^2$
$+78a_2^3a_3+4a_2^5)+(3a_3+3a_2^2)(16a_7+58a_2a_6+64a_3a_5+33a_4^2+66a_2^2a_5+140a_2a_3a_4$

$+24a_3^3+24a_2^3a_4+37a_3^2a_2^2)+4a_2(17a_8+46a_2a_7+54a_3a_6+58a_4a_5+32a_2a_4^2+62a_2a_3a_5$
$+28a_2^2a_6+33a_3^2a_4)+(18a_9+32a_2a_8+42a_3a_7+48a_4a_6+25a_5^2)=18a_9+100a_2a_8$
$+90a_3a_7+78a_4a_6+25a_5^2+232a_2^2a_7+420a_2a_3a_6+368a_2a_4a_5+449a_2^2a_4^2+774a_2^2a_3a_5$
$+286a_2^3a_6+924a_2a_3^2a_4+192a_3^2a_5+243a_3a_4^2+198a_2^4a_5+870a_2^3a_3a_4+72a_3^4+411a_2^2a_3^3$
$+80a_2^5a_4+267a_3^2a_2^4+8a_2^6a_3.$ (84)

Aus (83) und (84) ergibt sich

$\alpha_4=12a_9+58a_2a_8+42a_3a_7+24a_4a_6-14a_5^2+112a_2^2a_7+150a_2a_3a_6-52a_2a_4a_5$
$-a_2^2a_4^2-66a_2^2a_3a_5+106a_2^3a_6+24a_2a_3^2a_4-18a_3^2a_5+18a_3a_4^2-12a_2^4a_5-30a_2^3a_3a_4-3a_3^4$
$-39a_2^2a_3^3-10a_2^5a_4+42a_3^2a_2^4-7a_2^6a_3.$ (85)

Wir finden aber

$\beta_4=-(a_6^{(6)}+4\bar{a}_4a_9^{(6)}+3\bar{a}_3a_8^{(6)}+2\bar{a}_2a_7^{(6)})=-\{1+4\bar{a}_4(6a_4+{}_6C_42a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)$
$+3\bar{a}_3(6a_3+15a_2^2)+2\bar{a}_2\cdot 6a_2\}.$ (85)

Nach(73), (74), (77), (78), (81), (82), (85), (86) besteht es

$2(9a_6+32a_2a_5+42a_3a_4+21a_2^2a_4+39a_2a_3^2-42a_2^3a_3-17a_2^5)b_1-2(6a_4+30a_2a_3$
$+20a_2^3)\bar{b}_1+3(10a_7+46a_2a_6+22a_3a_5+18a_4^2+82a_2^2a_5+44a_2a_3a_4+66a_2^3a_4-26a_3^3$
$-65a_2^2a_3^2-24a_2^4a_3-5a_2^6)b_2-3\{2\bar{a}_2(6a_4+{}_6C_42a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+\bar{a}_1(6a_3+15a_2^2)\}\bar{b}_2$
$+4(11a_8+52a_2a_7+36a_3a_6+10a_4a_5+97a_2^2a_6+120a_2a_3a_5-49a_4^2a_2-18a_3^2a_4$
$-39a_3^2a_2^2-12a_2^4a_4+20a_2a_3^3-66a_2^2a_3a_4+86a_2^3a_5+2a_2^5a_3+2a_2^7)b_3-4\{3\bar{a}_3(6a_4$
$+{}_6C_42a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+2\bar{a}_2(6a_3+15a_2^2)+\bar{a}_16a_2\}\bar{b}_3+(12a_9+58a_2a_8+42a_3a_7+24a_4a_6$
$-14a_5^2+112a_2^2a_7+150a_2a_3a_6-52a_2a_4a_5-a_2^2a_4^2-66a_2^2a_3a_5+106a_2^3a_6+24a_2a_3^2a_4$
$-18a_3^2a_5+18a_3a_4^2-12a_2^4a_5-30a_2^3a_3a_4-3a_3^4-39a_2^2a_3^3-10a_2^5a_4+42a_3^2a_2^4-7a_2^6a_3)b_4$
$-\{1+4\bar{a}_4(6a_4+{}_6C_42a_2a_3+{}_6C_3a_2^3)+3\bar{a}_3(6a_3+15a_2^2)+2\bar{a}_2\cdot 6a_2\}\bar{b}_4=0.$ (87)

Wir setzen nun $s=0$ in (87), so gewinnen wir

$12a_9(0)+58a_2(0)a_8(0)+42a_3(0)a_7(0)+24a_4(0)a_6(0)-14a_5(0)^2+112a_2(0)^2a_7(0)$
$+150a_2(0)a_3(0)a_6(0)-52a_2(0)a_4(0)a_5(0)-a_2(0)^2a_4(0)^2-66a_2(0)^2a_3(0)a_5(0)+$
$106a_2(0)^3a_6(0)+24a_2(0)a_3(0)^2a_4(0)-18a_3(0)^2a_5(0)+18a_3(0)a_4(0)^2-12a_2(0)^4a_5(0)$
$-30a_2(0)^3a_3(0)a_4(0)-3a_3(0)^4-39a_2(0)^2a_3(0)^3-10a_2(0)^5a_4(0)+42a_3(0)^2a_2(0)^4$
$-7a_2(0)^6a_3(0)-\{1+4\bar{a}_4(0)(6a_4(0)+{}_6C_42a_2(0)a_3(0)+{}_6C_3a_2(0)^3)+3\bar{a}_3(0)(6a_3(0)+$
$15a_2(0)^2)+2\bar{a}_2(0)\cdot 6a_2(0)\}=0.$ (88)

Wir differenzieren nun die linke Seite von (87) in bezug auf s am Punkte $s=0$. Wir gewinnen dann

$-4(9a_6(0)+32a_2(0)a_5(0)+42a_3(0)a_4(0)+21a_2(0)^2a_4(0)+39a_2(0)a_3(0)^2-$
$42a_2(0)^3a_3(0)-17a_2(0)^5)\kappa^3(0)+4(6a_4(0)+30a_2(0)a_3(0)+20a_2(0)^3)\bar{\kappa}^3(0)-6(10a_7(0)$
$+46a_2(0)a_6(0)+22a_3(0)a_5(0)+18a_4(0)^2+82a_2(0)^2a_5(0)+44a_2(0)a_3(0)a_4(0)+$
$66a_2(0)^3a_4(0)-26a_3(0)^3-65a_2(0)^2a_3(0)^2-24a_2(0)^4a_3(0)-5a_2(0)^6)\kappa^2(0)+6$

$$
\begin{aligned}
&\{2\bar{a}_2(0)(6a_4(0)+{}_6C_4 2a_2(0)a_3(0)+{}_6C_3 a_2(0)^3)+\bar{a}_1(0)(6a_3(0)+15a_2(0)^2)\}\bar{\kappa}^2(0)-8(11a_8(0)\\
&+52a_2(0)a_7(0)+36a_3(0)a_6(0)+10a_4(0)a_5(0)+97a_2(0)^2a_6(0)+120a_2(0)a_3(0)a_5(0)\\
&-49a_4(0)^2a_2(0)-18a_3(0)^2a_4(0)-39a_3(0)^2a_2(0)^3-12a_2(0)^4a_4(0)+20a_2(0)a_3(0)^3\\
&-66a_2(0)^2a_3(0)a_4(0)+86a_2(0)^3a_5(0)+2a_2(0)^5a_3(0)+2a_2(0)^7)\kappa(0)+8\{3\bar{a}_3(0)(6a_4(0)\\
&+{}_6C_4 2a_2(0)a_3(0)+{}_6C_3 a_2(0)^3)+2\bar{a}_2(0)(6a_3(0)+15a_2(0)^2)+\bar{a}_1(0)6a_2(0)\}\bar{\kappa}(0)+(12a_9\\
&+58a_2a_8+42a_3a_7+24a_4a_6-14a_5^2+112a_2^2a_7+150a_2a_3a_6-52a_2a_4a_5-a_2^2a_4^2-\\
&66a_2^2a_3a_5+106a_2^3a_6+24a_2a_3^2a_4-18a_3^2a_5+18a_3a_4^2-12a_2^4a_5-30a_2^3a_3a_4-3a_3^4-39a_2^2a_3^3\\
&-10a_5^2a_4+42a_3^2a_2^4-7a_2^6a_3)'_{s=0}-\{1+4\bar{a}_4(6a_4+{}_6C_4 2a_2a_3+{}_6C_3 a_2^3)+3\bar{a}_3(6a_3+15a_2^2)\\
&+2\bar{a}_2 6a_2\}'_{s=0}=0. \qquad (89)
\end{aligned}
$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY.

(*Received December 20, 1960*)